Vahvasti minimaaliset ryhmät

Matti Åstrand

Kandidaatin tutkielma
Helsingin yliopisto
2008

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutkitaan ryhmiä, joilla on ominaisuus nimeltä *vahva minimaalisuus*. Käsite "olla vahvasti minimaalinen" tulee malliteoriasta, joka on yksi logiikan ala. Tutkielman lukemiseen riittänee jonkin logiikan kurssin — kuten kurssin Logiikka I — tiedot, sekä ryhmäteorian alkeet esimerkiksi kurssista Algebra I.

Tutkielman alussa kerrataan tiiviisti tarvittavat malliteorian tiedot, osittain ilman todistuksia. Seuraavaksi määritellään käsite *Morley-rank*, joka liittyy malleissa määriteltäviin osajoukkoihin. Tämän jälkeen määritellään vahva minimaalisuus ja todistataan sille muutama perusominaisuus. Lopuksi tutkitaan ryhmiä malliteorian välinein ja todistetaan, että äärettömät vahvasti minimaaliset ryhmät ovat vaihdannaisia.

2 Mallit ja teoriat

Määritelmä. Määritellään kaavat ja lauseet:

- *Aakkosto* L on joukko vakio-, funktio- ja relaatiosymboleita. Funktio- ja relaatiosymboleille on määrätty *paikkaluku*, joka on positiivinen kokonaisluku.
- L-*termi* on vakiosymboli, muuttujasymboli tai muotoa $f(t_1, \ldots, t_n)$, jossa $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä.
- L-*atomikaava* on muotoa $t_1 = t_2$, jossa t_1 ja t_2 ovat L-termejä, tai muotoa $R(t_1, \ldots, t_n)$, jossa $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä ja $R \in L$ on relaatiosymboli, jonka paikkaluku on n.
- L-*kaava* on joko L-atomikaava tai muotoa $\phi \wedge \psi$, $\neg\phi$ tai $\exists x\phi$, jossa ϕ ja ψ ovat L-kaavoja ja x on muuttujasymboli.

Muut loogiset konnektiivit voidaan määritellä lyhennysmerkintöinä ylläolevien konnektiivien avulla seuraavasti:

- $\phi \vee \psi = \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \rightarrow \psi = \neg(\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \leftrightarrow \psi = \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\phi)$

Määritelmä. Jos ϕ on L-kaava, niin ϕ:ssä esiintyvien *vapaiden* muuttujien joukko on $v(\phi)$, joka määritellään seuraavasti:

- Jos ϕ on atomikaava, niin $v(\phi)$ sisältää kaikki ϕ:n termeissä esiintyvät muuttujat.
- Jos $\phi = \neg\psi$, niin $v(\phi) = v(\psi)$.
- Jos $\phi = \psi \wedge \chi$, niin $v(\phi) = v(\psi) \cup v(\chi)$.
- Jos $\phi = \exists x\psi$, niin $v(\phi) = v(\psi) \setminus \{x\}$.

Muuttujasymboli x esiintyy L-kaavassa ϕ vapaana, jos $x \in v(\phi)$. L-*lause* on L-kaava ϕ, jolle $v(\phi) = \varnothing$.

Jos kaavaa merkitään $\phi(\bar{x})$, jossa $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, niin merkintä tarkoittaa, että kaavassa vapaana esiintyvien muuttujien joukko sisältyy joukkoon $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Samoin termeille käytetään merkintää $t(\bar{x})$, jos t:ssä esiityvien muuttujien joukko sisältyy joukkoon $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Määritelmä. Jos L on aakkosto, niin *L-malli* on struktuuri $\mathcal{A}$, johon kuuluu joukko A, sekä jokaista L:n vakio-, funktio- ja relaatiosymbolia kohden vakio, funktio tai relaatio, jolla on vastaava paikkaluku. Toisin sanoen vakiosymbolia $c \in L$ vastaa alkio $c^{\mathcal{A}} \in A$, funktiosymbolia $f \in L$, jonka paikkaluku on n, vastaa funktio $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ ja relaatiosymbolia $R \in L$, jonka paikkaluku on n, vastaa relaatio $R^{\mathcal{A}} \subset A^n$.

Määritelmä. Olkoon A aakkoston L-malli, $t(\bar{x})$ L-termi ja $\bar{a}$ jono A:n alkioita. Termin $t(\bar{x})$ *tulkinta* mallissa A muuttujien arvoilla $\bar{a}$, jota merkitään $t^A(\bar{a})$, määritellään seuraavasti:

- Jos $t(\bar{x})$ on muuttujasymboli x_i, niin $t^A(\bar{a}) = a_i$.
- Jos $t(\bar{x}) = f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x}))$, niin $t^A(\bar{a}) = f^A(t_1^A(\bar{a}), \ldots, t_n^A(\bar{a}))$.

Kaavan $\phi(\bar{x})$ *toteutuminen tulkinnoilla* $\bar{a}$ määritellään seuraavasti:

- Jos $\phi(\bar{x})$ on atomikaava muotoa $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$, niin $\phi(\bar{a})$ toteutuu A:ssa, jos $t_1^A(\bar{a}) = t_2^A(\bar{a})$. Jos $\phi(\bar{x})$ on muotoa $R(t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x}))$, niin $\phi(\bar{a})$ toteutuu A:ssa jos $(t_1^A(\bar{a}), \ldots, t_n^A(\bar{a})) \in R^A$.
- Jos $\phi(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}) \wedge \psi_2(\bar{x})$, niin $\phi(\bar{a})$ toteutuu A:ssa, jos $\psi_1(\bar{a})$ toteutuu A:ssa ja $\psi_2(\bar{a})$ toteutuu A:ssa. Jos $\phi(\bar{x}) = \neg\psi(\bar{x})$, niin $\phi(\bar{a})$ toteutuu A:ssa jos $\psi(\bar{a})$ ei toteudu A:ssa.
- Jos $\phi(\bar{x}) = \exists\psi(\bar{x}, y)$, niin $\phi(\bar{x})$ toteutuu A:ssa jos on olemassa A:n alkio b, jolle kaava $\psi(\bar{a}, b)$ toteutuu A:ssa.

Merkintä $A \models \phi(\bar{a})$ tarkoittaa, että kaava $\phi(\bar{x})$ toteutuu mallissa A tulkinnoilla $\bar{a}$.

Määritelmä. Aakkoston L *teoria* on joukko L-lauseita. Malli A *toteuttaa* teorian T, jos se toteuttaa kaikki T:n lauseet. Mallin A täydellinen teoria on kaikkien niiden L-lauseiden joukko, jotka A toteuttaa.

Määritelmä. Jonon $\bar{a} \in A$ *tyyppi* on niiden L-kaavojen $\phi(\bar{x})$ joukko, joille pätee $A \models \phi(\bar{a})$.

Määritelmä. Relaatio $R \subset A^n$ on *määriteltävä*, jos on olemassa L-kaava $\phi(\bar{x})$, jolle pätee $A \models \phi(\bar{a})$ täsmälleen silloin, kun $\bar{a} \in R$. Jos R on määriteltävä aakkoston $L \cup A$ kaavalla, sen sanotaan olevan *parametrein määriteltävä* A:ssa.

Mallin aakkostoa halutaan usein laajentaa lisäämällä siihen vakiosymboleja.

Määritelmä. Olkoon M aakkoston L malli ja $A \subset M$. Merkintä $L \cup A$ tarkoittaa aakkostoa, johon kuuluu kaikkien L:n symboleiden lisäksi vakiosymboli jokaiselle joukon A alkiolle. Aakkoston $L \cup A$ kaavat ovat siis muotoa $\phi(\bar{x}, \bar{a})$, jossa $\bar{x}$ on jono muuttujia ja $\bar{a}$ on jono A:n alkioita. Tällöin M voidaan tulkita aakkoston $L \cup A$ malliksi siten, että L:n symbolien tulkinnat eivät muutu, ja A:n alkiot tulkitaan itselleen: jos $a \in A$, niin $a^M = a$. Tätä uutta mallia merkitään $\langle M, A \rangle$.

Seuraava lause on yksi yleisimmin käytetyistä tuloksista malliteoriassa. Se otetaan käyttöön ilman todistusta (ks. [3, s. 124]).

Lause 1 (Kompaktisuuslause)**.** *Jos teorian T jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli, niin T:llä on malli.*

Määritelmä. Jos A ja B ovat aakkoston L malleja, ja $A \subset B$, niin A on B:n alimalli, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- Jos $\bar{a} \in A^n$ ja $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli, niin $\bar{a} \in R^A$ jos ja vain jos $\bar{a} \in R^B$.
- Jos $\bar{a} \in A^n$ ja $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli, niin $f^A(\bar{a}) = f^B(\bar{a})$.
- Jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin $c^A = c^B$.

Olkoon A on B:n alimalli. Nyt A on *elementaarinen alimalli*, jos kaikilla L-kaavoilla $\phi(\bar{x})$ ja kaikilla $\bar{a} \in A$ pätee $A \models \phi(\bar{a})$ jos ja vain jos $B \models \phi(\bar{a})$.

Kuten kompaktisuuslause, myös seuraavat lauseet otetaan käyttöön ilman todistusta. Ensimmäinen on nimeltään ylöspäinen Löwenheim-Skolemin lause. Toinen sanoo, että saman teorian mallit uppoavat samaan malliin. Todistukset löytyvät lähteestä [3, s. 127,135].

Lause 2. *Olkoon A aakkoston L ääretön malli. Jos κ on kardinaali ja $\kappa \geq max(|A|, |L|)$, niin A:lla on elementaarinen laajennus, jonka koko on κ.*

Lause 3. *Jos malleilla A ja B on sama teoria, niin on olemassa malli C, ja elementaariset upotukset $f : A \to C$ ja $g : B \to C$.*

3 Morley-rank

Määritelmä. Olkoon A aakkoston L malli, ja $\phi(\bar{x})$ aakkoston $L \cup A$ kaava. Kaavan $\phi(\bar{x})$ *Morley-rank* mallissa A, jota merkitään $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x}))$, määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \geq 0$, jos pätee $A \models \exists\bar{x}(\phi(\bar{x}))$.
- $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha + 1$, jos kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa A:n elementaarinen laajennus B, ja aakkoston $L \cup B$ kaavat $\psi_i(\bar{x}), 1 \leq i \leq n$, joille pätee $B \models \psi_i(\bar{x}) \to \phi(\bar{x})$ ja $B \models \forall\bar{x}\ \neg(\psi_i(\bar{x}) \wedge \psi_j(\bar{x}))$, kun $i \neq j$, sekä $\mathrm{MR}(\psi_i(\bar{x})) \geq \alpha$.
- Jos α on rajaordinaali, niin $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$, jos $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \geq \beta$ kaikilla ordinaaleilla $\beta < \alpha$.

Tällöin $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x}))$ on pienin ordinaali α, jolle $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \not\geq \alpha + 1$. Mallin A Morley-rank on kaavan $x = x$ Morley-rank A:ssa.

Huomioita äskeisestä määritelmästä:

- Määritelmästä on helppo nähdä, että kaavan Morley-rank on monotoninen implikaation suhteen, eli jos $A \models \forall\bar{x}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$, niin $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \leq \mathrm{MR}(\psi(\bar{x}))$. Tästä seuraa, että kaikilla kaavoilla $\phi(x)$ pätee $\mathrm{MR}(\phi(x)) \leq \mathrm{MR}(x = x) = \mathrm{MR}(A)$.

- Malli A on ääretön jos ja vain jos sen Morley-rank on vähintään yksi. Nimittäin jos A on ääretön, niin kaavat $\psi_i(x) = (x = a_i)$, jossa $a_i \in A$ ovat eri alkioita, kelpaavat määritelmän kaavoiksi. Toisaalta, jos $\mathrm{MR}(A) \geq 1$, niin A:lla on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ elementaarinen laajennus B, ja n kaavaa joilla on toteuttajat B:ssä, mutta joiden toteuttajat ovat eri alkioita. Siis mallilla A on elementaarisia laajennuksia, joissa mielivaltainen äärellinen määrä alkioita. Tällöin A on ääretön, sillä se toteuttaa kaavan $\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i<j} \neg(x_i = x_j) \right)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 4. *Jos mallin A Morley-rank on äärellinen, niin siinä ei voida millään kaavalla järjestää mielivaltaisen montaa alkiota.*

Todistus. Olkoon $\phi(x, y, \bar{z})$ kaava ja $\bar{b} \in A$ parametrit, joille on millä tahansa $n \in \mathbb{N}$ olemassa alkiot a_i, $0 \leq i \leq n$ joille pätee $A \models \phi(a_i, a_j, \bar{b})$ täsmälleen silloin, kun $i < j$.

Olkoon T seuraava teoria

$$T = \mathrm{Th}(\langle A, A \rangle) \cup \left\{ \phi(c_q, c_s, \bar{b}) | q, s \in \mathbb{Q}, q < s \right\} \cup \left\{ \neg\phi(c_q, c_s, \bar{b}) | q, s \in \mathbb{Q}, q \geq s \right\},$$

jossa ensimmäinen joukko sisältää kaikki todet lauseet mallissa, jossa on lisätty A:n jokaiselle alkiolle oma vakiosymboli. Teorian T aakkostossa on A:n aakkoston lisäksi vakiosymboli c_q jokaista rationaalilukua q kohti sekä vakiosymbolit kaikille A:n alkioille.

Jos $T' \subset T$ on T:n äärellinen osajoukko, niin T':ssä voi esiintyä vain äärellinen määrä vakiosymboleita c_q. Merkitään

$$\{q_0, \ldots, q_n\} = \{q | c_q \text{ esiintyy } T'\text{:ssä}\},$$

jossa $q_0 < q_1 < \ldots < q_n$. Oletuksen perusteella T':llä on malli, jossa c_{q_i} on tulkittu a_i:ksi, kun alkiot a_i on valittu oletuksen mukaisesti.

Kompaktisuuslauseen nojalla teorialla T on malli B.

Mallissa B on tulkinnat jokaiselle vakiosymbolille $b \in A$. Lisäksi B:ssä on totta $B \models \neg(b = c)$, kun $b, c \in A$ ja $b \neq c$, koska B toteuttaa kaikki A:n todet lauseet. Tämän nojalla voidaan samaistaa A:n alkiot symboleiden $b \in A$ tulkintojen kanssa, jolloin B:n rajoittuma A:n aakkostoon on A:n elementaarinen laajennus.

On siis saatu mallin A elementaarinen laajennus B, jossa kaava ϕ määrittelee alkioille c_q järjestyksen indeksin $q \in \mathbb{Q}$ mukaisesti. Toisin sanoen pätee

$$B \models \phi(c_q, c_r, \bar{b})$$

jos ja vain jos $q < r$.

Osoitetaan nyt induktiolla, että $\mathrm{MR}(A) \geq n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Induktioväite on seuraava: jos $\bar{q}, \bar{r} \in \mathbb{Q}$ ja $\max \bar{q} < \min \bar{r}$, niin kaavan

$$\psi_{\bar{q},\bar{r}}(x) = \bigwedge_{q \in \bar{q}} \phi(c_q, x, \bar{b}) \wedge \bigwedge_{r \in \bar{r}} \neg\phi(c_r, x, \bar{b})$$

Morley-rank on vähintään n. Jos tämä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin selvästi $\mathrm{MR}(A) \geq \omega$.

Ensinnäkin kaava $\psi_{\bar{q},\bar{r}}(x)$ toteutuu millä tahansa c_s, jossa $\max \bar{q} < s < \min \bar{r}$, joten $\mathrm{MR}(\psi_{\bar{q},\bar{r}}(x)) \geq 1$.

Oletetaan, että $\mathrm{MR}(\psi_{\bar{q},\bar{r}}(x)) \geq n$ kaikilla $\bar{q}, \bar{r} \in \mathbb{Q}$, joilla $\bar{q} < \bar{r}$, jossa $n \geq 1$. Jos nyt $\bar{q} < \bar{r}$ ja $m \geq 0$, niin avoimella välillä $(\max \bar{q}, \min \bar{r})$ on äärettömän monta rationaalilukua. Otetaan niistä $a_0 < \cdots < a_m$, ja määritellään kaavat $\psi_i(x)$, kun $1 \leq i \leq m$ seuraavasti:

$$\psi_i(x) = \psi_{(\bar{q}a_0 \cdots a_{i-1}),(a_i \cdots a_m \bar{r})}(x).$$

Nyt kaava $\psi_i(x) \wedge \psi_j(x)$ on ristiriitainen, kun $i < j$, koska se on konjunktio joka sisältää molemmat kaavoista $\phi(c_{a_i}, x, \bar{b})$ ja $\neg\phi(c_{a_i}, x, \bar{b})$. Lisäksi $\mathrm{MR}(\psi_i(x)) \geq n$, sillä $\max(\bar{q}a_0 \cdots a_{i-1}) = a_{i-1} < a_i = \min(a_i \cdots a_m \bar{r})$ sekä $\psi_i(x) \rightarrow \psi_{\bar{q},\bar{r}}(x)$. Koska $m \geq 0$ valittiin mielivaltaisesti, niin Morley-rankin määritelmän nojalla $\mathrm{MR}(\psi_{\bar{q},\bar{r}}(x)) \geq n + 1$. $\square$

4 Vahvasti minimaaliset mallit

Määritelmä. Malli A on *vahvasti minimaalinen*, jos sen elementaarisissa laajennuksissa kaikki parametrein määriteltävät joukot ovat äärellisiä tai niiden komplementti on äärellinen.

Määritelmä. Olkoon b alkio mallissa A, ja $\bar{a}$ jono A:n alkioita. Tällöin b on *algebrallinen* yli jonon $\bar{a}$, jos on olemassa kaava $\phi(x, \bar{a})$, jolle pätee $A \models \phi(b, \bar{a})$ ja on vain äärellinen määrä alkioita $b' \in A$, joille $A \models \phi(b', \bar{a})$.

Lause 5. *Olkoon A on vahvasti minimaalinen ääretön malli, $\bar{a} \in A^n$ sekä b ja c alkioita, jotka eivät ole algebrallisia yli $\bar{a}$:n. Tällöin b:llä ja c:llä on sama tyyppi yli $\bar{a}$:n.*

Todistus. Jos b:llä ja c:llä olisi eri tyyppi, niin olisi kaava $f(x, \bar{a})$, jonka b toteuttaa, mutta c ei. Tällöin kaavoilla $f(x, \bar{a})$ ja $\neg f(x, \bar{a})$ on molemmilla ääretön määrä toteuttajia, koska b ja c eivät ole algebrallisia. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että A on vahvasti minimaalinen, joten b:llä ja c:llä on sama tyyppi. $\square$

Lause 6. *Jos alkio b on algebrallinen jonon $\bar{a}$ suhteen mallissa A, ja jokainen $a_i \in \bar{a}$ on algebrallinen jonon $\bar{c}$ suhteen, niin b on algebrallinen $\bar{c}$:n suhteen.*

Todistus. Olkoon $\phi(x, \bar{a})$ kaava, jonka b toteuttaa, ja jolla on $m < \omega$ toteuttajia, sekä kaikilla i sellainen kaava $\psi_i(x, \bar{c})$, että a_i toteuttaa sen, ja $\psi_i(x, \bar{c})$:llä on $m_i < \omega$ toteuttajaa. Määritellään kaava

$$\chi(x, \bar{c}) = \exists \bar{y} \left(\bigwedge_i \psi_i(y_i, \bar{c}) \wedge \phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \exists z_o \cdots z_m \left(\bigwedge_{i<j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_i \phi(z_i, \bar{y}) \right) \right).$$

Näytetään nyt, että $\chi(x, \bar{c})$:llä on äärellinen määrä toteuttajia. Ensinnäkin jonoja $\bar{y}$, jotka toteuttavat kaavat $\psi_i(y_i, \bar{c})$, on Πm_i kappaletta. Jos tällainen $\bar{y}$ toteuttaa viimeisen kaavan, niin mahdollisia x on korkeintaan m kappaletta. Toisin sanoen $\chi(x, \bar{c})$:llä on korkeintaan $m \cdot \Pi m_i$ toteuttajaa.

Koska b toteuttaa $\chi(x, \bar{c})$:n ($\bar{y}$:n paikalle voidaan valita $\bar{a}$), niin b on algebrallinen $\bar{c}$:n suhteen. $\square$

5 Ryhmien teoria

Siirrytään nyt tutkimaan ryhmiä.

Määritelmä. Kiinnitetään aakkosto $L = \{1, \cdot, (\ )^{-1}\}$, jossa on siis yksi vakiosymboli sekä kaksipaikkainen ja yksipaikkainen funktiosymboli. *Ryhmä* on aakkoston L malli, joka toteuttaa seuraavan teorian:

$$
\begin{aligned}
T = \quad & \{\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z), \\
& \forall x (x \cdot x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} \cdot x = 1), \\
& \forall x (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)\}
\end{aligned}
$$

Tästä eteenpäin kertolaskun merkki jätetään kirjoittamatta, eli $x \cdot y$ kirjoitetaan xy.

Määritelmä. Ryhmiin liittyviä käsitteitä:

- Ryhmä G on *vaihdannainen*, jos kaikille $x, y \in G$ pätee $xy = yx$
- Ryhmän G alimallia H (ylläolevan aakkoston mielessä) kutsutaan sen *aliryhmäksi*. Tällöin merkitään $H \leq G$.
- Jos $H \leq G$, niin joukot, jotka ovat muotoa $\{xh | h \in H\}$, ovat H:n *sivuluokkia*. (On helppo näyttää, että aliryhmän H eri sivuluokat muodostavat ryhmän osituksen.)
- Aliryhmä $H \leq G$ on *äärellistä indeksiä*, jos sillä on vain äärellinen määrä sivuluokkia. Tällöin sivuluokkien määrää kutsutaan H:n *indeksiksi* G:ssä ja merkitään $[G : H]$.
- Jos alkiolle $x \in G$ pätee $x^n = 1$ jollain $n > 0$, niin x on *äärellisasteinen* ja pienin tällainen n on x:n *aste*.
- Alkiot $a, b \in G$ ovat *konjugaatteja*, jos jollekin $x \in G$ pätee $a = x^{-1}bx$. Niiden alkioiden joukko, jotka ovat a:n konjugaatteja, on a:n *konjugaattiluokka*. (Myös konjugaattiluokat muodostavat G:n osituksen.)

Seuraava aputulos on lähteestä [2, s. 108].

Lause 7. *Jos ryhmän G kaikki alkiot ovat äärellisasteisia ja $G \setminus \{1\}$:n kaikki alkiot samassa konjugaattiluokassa, niin G on vaihdannainen ja $|G| \leq 2$.*

Todistus. Olkoon $g \in G$, $g \neq 1$. Nyt g:n aste on muotoa pk, jossa p on alkuluku, joten alkion g^k aste on p. Koska konjugaateilla on keskenään sama aste, niin kaikilla joukon $G \setminus \{1\}$ alkioilla on sama aste. Siis $k = 1$ ja kaikkien alkoiden aste on p. Koska $g^{-1} \neq 1$, niin on olemassa $h \in G$, jolle $g^{-1} = h^{-1}gh$. Nyt

$$h^{-2}gh^2 = h^{-1}(g^{-1})h = (h^{-1}gh)^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$$

ja yleisesti jos $n \in \mathbb{N}$, niin $h^{-n}gh^n = g^{(-1)^n}$. Kun tähän sijoitetaan $n = p$, saadaan $g = g^{(-1)^p}$. Jos p olisi pariton, niin pätisi $g^{-1} = g$, eli $g^2 = 1$, jolloin g:n aste olisi 2, eli $p = 2$, joka on ristiriita. Luvun p on siis oltava 2, jolloin kaikki G:n alkiot g toteuttavat $g = g^{-1}$. Jos nyt $a, b \in G$, niin $ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba$, joten G on vaihdannainen. Jos $a, b \in G \setminus \{1\}$, niin jollain $h \in G$ pätee $a = h^{-1}bh = h^{-1}hb = b$. G:ssä on siis korkeintaan yksi 1:stä eroava alkio, joten $|G| \leq 2$. $\square$

Lause 8. *Jos ryhmän G aliryhmien H ja K indeksit ovat äärellisiä, niin myös $H \cap K$:n indeksi on äärellinen.*

Todistus. Näytetään ensin, että ryhmän $H \cap K$ indeksi H:n aliryhmänä on äärellinen, eli $[H : H \cap K] < \infty$. Jos alkiot $a_i \in H, 1 \leq i \leq n$ ovat eri sivuluokissa $H \cap K$:n suhteen, niin $a_j^{-1}a_i \in H$, mutta $a_j^{-1}a_i \notin H \cap K$. Siis $a_j^{-1}a_i \notin K$, joten alkiot $a_i \in G$ ovat eri sivuluokissa K:n suhteen. Koska K:n indeksi on äärellinen, niin alkioita a_i voi olla korkeintaan $[G : K]$ kappaletta, joten $[H : H \cap K] \leq [G : K] < \infty$.

Nyt riittää todistaa seuraava väite: jos $K \leq H \leq G$ ja indeksit $[G : H]$ ja $[H : K]$ ovat äärellisiä, niin myös $[G : K]$ on äärellinen. Olkoon tilanne kuvatunlainen sekä $(a_iH)_{1\leq i\leq n}$ kaikki H:n sivuluokat G:ssä ja $(b_jK)_{1\leq j\leq m}$ kaikki K:n sivuluokat H:ssa. Jos $x \in G$, niin jollain i pätee $x \in a_iH$, eli $a_i^{-1}x \in H$. Nyt jollain j pätee $a_i^{-1}x \in b_jK$, eli $x \in a_ib_jK$. Toisin sanoen luokat $(a_ib_jK)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ osittavat koko G:n, eli kaikki K:n sivuluokat ovat tätä muotoa. Toisin sanoen K:n indeksi on nm, joka on äärellinen. □

Äskeiset lauseet käyttivät muotoiluissaan ja todistuksissaan pelkästään algebraa, mutta seuraava lause liittää toisiinsa ryhmien algebrallisen ja loogisen rakenteen.

Lause 9. *Jos ryhmän G Morley-rank on 1, niin sillä on määriteltävä aliryhmä G°, jonka indeksi on äärellinen ja jokainen määriteltävä äärellisindeksinen G:n aliryhmä sisältää G°:n.*

Todistus. Näytetään ensin, ettei G:n määriteltävillä aliryhmillä voi olla mielivaltaisen suuria äärellisiä indeksejä. Oletetaan päinvastoin, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ olisi kaava $\phi(x)$, joka määrittelee aliryhmän, jonka indeksi on äärellinen ja vähintään n. Tällöin kaavoilla $\psi_i(x, a_i) = \exists y(\phi(y) \wedge x = a_iy)$ saadaan määriteltyä kyseisen aliryhmän sivuluokat, kunhan parametrit $a_i \in G$ ovat sivuluokkien edustajat. Sivuluokat ovat äärettömiä, ja niitä on n kappaletta, joten tässä tapauksessa ryhmän Morley-rank olisi vähintään 2, joka on ristiriita.

On siis nähty, että äärelliset indeksit ovat ylhäältä rajoitettuja. Otetaan määriteltävä aliryhmä H, jolla on maksimaalinen äärellinen indeksi. Jos nyt K on toinen määriteltävä aliryhmä, jolla on äärellinen indeksi, niin myös $H \cap K$:n indeksi on äärellinen (sekä $H \cap K$ määriteltävä), joten maksimaalisuuden nojalla $[G : H \cap K] \leq [G : H]$. Toisaalta pätee $H \cap K \leq H$, joten täytyy olla $H \cap K = H$, eli $H \leq K$. Toisin sanoen H sisältyy kaikkiin määriteltäviin aliryhmiin, joilla on äärellinen indeksi, ja voidaan määritellä $G^\circ = H$. □

Seuraavat todistukset ovat (hieman muuteltuina) lähteestä [1, s. 50].

Lause 10. *Jos ryhmä H on ääretön, sen kaikki epätriviaalit alkiot ovat konjugaatteja ja H ei ole vaihdannainen, niin H:lla on jono alkioita, joiden keskittäjät muodostavat aidosti kasvavan jonon.*

Todistus. Valitaan alkio $a \in H, a \neq 1$. Tällöin $a^2 \neq 1$, sillä muuten kaikki alkiot olisivat astetta 2, ja H olisi näin ollen vaihdannainen. Siis a ja a^{-1} ovat eri alkioita ja löytyy $b \in H$, jolle $a = ba^{-1}b^{-1}$. Alkio b ei kommutoi a:n kanssa, sillä $ab = ba^{-1} \neq ba$, mutta b^2 kommutoi a:n kanssa, sillä

$$b^2a = b(ba) = b(a^{-1}b^{-1})^{-1} = b(b^{-1}a)^{-1} = ba^{-1}b = ab^2.$$

Nyt $Z(b) \subsetneq Z(b^2)$. Oletuksen mukaan myös b^2 ja b ovat konjugaatteja, eli jollekin $c \in H$ pätee $b^2 = cbc^{-1}$. Koska kuvaus $x \mapsto cxc^{-1}$ on H:n automorfismi, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$Z(c^n bc^{-n}) \subsetneq Z(c^{n+1} bc^{-(n+1)}).$$

Näin jono $(c^n bc^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ on haluttu jono. □

Lause 11. *Olkoon G ylinumeroituva vahvasti minimaalinen ryhmä. Tällöin G on vaihdannainen.*

Todistus. Jos G ei ole vaihdannainen, niin sen keskus $\mathrm{Z}(G)$ on äärellinen. Olkoon $a \in G \backslash \mathrm{Z}(G)$, ja $b \in G$ alkio, joka ei ole a:n suhteen algebrallinen (tällainen on olemassa, koska G on ylinumeroituva). Näytetään, että b on algebrallinen yli parin (a, bab^{-1}): alkioita c, jolle $cac^{-1} = bab^{-1}$ on äärellinen määrä. Muuten olisi $(b^{-1}c)a = a(b^{-1}c)$ äärettömän monelle c, jolloin a:n keskittäjä olisi ääretön. Koska alkion a keskittäjä $\{x \in G | ax = xa\}$ on määriteltävä aliryhmä, joka ei ole koko G, niin sen on oltava äärellinen.

Nyt bab^{-1} ei voi olla algebrallinen a:n suhteen, koska tällöin b olisi algebrallinen a:n suhteen. Tällöin b:llä ja bab^{-1}:llä on sama tyyppi yli alkion a, joten b on a:n konjugaatti. Koska G on ylinumeroituva, ja a:n yli algebrallisia alkioita on vain numeroituva määrä, niin vain numeroituva määrä G:n alkioista ei ole a:n konjugaatteja. Koska sama pätee kaikille alkioille $a \in G \backslash \mathrm{Z}(G)$, niin kaikki joukon $G \backslash \mathrm{Z}(G)$ alkiot ovat toistensa konjugaatteja.

Nyt tekijäryhmä $H = G/Z(G)$ on ääretön ja kaikki sen epätriviaalit alkiot ovat konjugaatteja. Ryhmä H ei ole vaihdannainen, sillä muuten siinä olisi korkeintaan 2 alkiota. Edellisen kohdan oletukset ovat siis voimassa, joten H:sta löytyy ääretön jono alkioita $(g_i Z(G))_{i\in\mathbb{N}}$, joiden keskittäjät muodostavat aidosti kasvavan jonon. Toisin sanoen alkiot (g_i) voidaan järjestää seuraavalla ensimmäisen kertaluvun kaavalla ϕ_1:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,y) &= \phi_2(x,y) \wedge \neg\phi_2(y,x) \\
\phi_2(x,y) &= \forall z\,(\exists w(\phi_3(w) \wedge zx = wxz) \to \exists w(\phi_3(w) \wedge zy = wyz)) \\
\phi_3(x) &= \forall z(xz = zx)
\end{aligned}$$

Näin ollen aiemman tuloksen nojalla ryhmän G Morley-rank ei voi olla äärellinen, joten G ei ole vahvasti minimaalinen. Tämä on ristiriita, joten G on vaihdannainen. □

Lause 12. *Jos G on ääretön vahvasti minimaalinen ryhmä, niin G on vaihdannainen.*

Todistus. Ylöspäisen Löwenheim-Skolemin lauseen perusteella G:llä on elementaarinen laajennus H, joka on ylinumeroituva. Tällöin H on elementaarisesti ekvivalentti G:n kanssa. Tällöin jokainen H:n elementaarinen laajennus voidaan upottaa G:n elementaariseen laajennukseen, joten myös H on vahvasti minimaalinen. Tällöin H on vaihdannainen.

Edelleen, koska G on elementaarisesti ekvivalentti H:n kanssa, niin G toteuttaa lauseen $\forall x \forall y(xy = yx)$, joten G on vaihdannainen. □

On mahdollista todistaa myös seuraava tulos (ks. [2, s. 108]).

Lause 13. *Jos G on ääretön ryhmä, jonka Morley-rank on 1, niin G° on vahvasti minimaalinen. Erityisesti G° on vaihdannainen.*

Toisin sanoen ryhmällä G, jonka Morley-rank on 1, on vaihdannainen aliryhmä, jonka indeksi on äärellinen.

Viitteet

[1] Bruno Poizat: *Stable Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, American mathematical Society, 2001.

[2] Steven Buechler: *Essential Stability Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag 1996.

[3] Wilfrid Hodges: *A Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.